

Teoria del consumo

Viki Nellas

Esercizio 1

Siano $p_x = 20$ e $p_y = 40$ i prezzi unitari di mercato di due beni le cui quantità sono indicate con x e y . Il reddito R di cui dispone il consumatore è pari a 5000

- Si tracci graficamente il vincolo di bilancio del consumatore e si indichi il valore dell'intercetta e del coefficiente angolare. Si indichi, inoltre, qual è l'insieme delle possibilità di consumo.
- Si indichi come si modifica il vincolo nel caso in cui $p_y = 30$;
- Cosa succede nel caso in cui i prezzi dei due beni raddoppiano? E se il reddito si dimezza?

Consideriamo ora un consumatore, soggetto al vincolo di bilancio individuato al punto a), le cui preferenze sono rappresentate dalla seguente funzione di utilità:

$$U(x,y) = xy$$

- si determini analiticamente la scelta ottimale dell'individuo;
- si rappresenti graficamente il problema.

Soluzione

La generica equazione della retta di bilancio è

$$p_x x + p_y y = R$$

nel caso considerato si avrà perciò:

$$20x + 40y = 5000$$

Per rappresentare graficamente il vincolo è necessario trovare, innanzitutto, i punti di intersezione con gli assi cartesiani, sui quali sono rappresentate le quantità dei beni x e y .

Porremo a sistema il vincolo di bilancio, rispettivamente, con l'equazione $x = 0$ e $y = 0$ e otterremo le coordinate delle intercette: $(0;125)$ e $(250;0)$. I valori trovati di x e y ci indicano le quantità di tali beni che verrebbero acquistate nel caso in cui il consumatore decidesse di destinare l'intero reddito solo ad uno dei due beni.

Il coefficiente angolare si evidenzia esplicitando il vincolo rispetto ad una delle due variabili, per

esempio rispetto ad y : $y = -\frac{20}{40}x + \frac{5000}{40}$

Si può vedere come l'inclinazione della retta sia uguale a $-\frac{1}{2}$ e sia pari al rapporto tra i prezzi dei due beni. Tale rapporto ci indica in che misura è possibile scambiare un bene con l'altro, dati i prezzi di mercato.

- Se si modifica il prezzo del bene y , passando da 40 a 30, si avrà un nuovo vincolo di bilancio,

$$20x + 30y = 5000$$

a cui corrisponderà una nuova intercetta rispetto all'asse x.

Nel caso specifico le nuove intercette saranno: $(250;0)$ e $(0; \frac{500}{3})$

Si può quindi osservare che, essendosi modificati i prezzi relativi, è cambiata l'inclinazione del vincolo di bilancio, che è pari a $-\frac{2}{3}$. Questo comporta che ora è mutata la proporzione con la quale una unità di un bene può essere scambiata con una certa quantità dell'altro bene.

c) Se il prezzo di entrambi i beni raddoppia avremo il seguente vincolo di bilancio:

$$40x + 80y = 5000$$

la cui inclinazione è $-\frac{1}{2}$ e le cui intercette risultano essere $(0;62,5)$ e $(125;0)$.

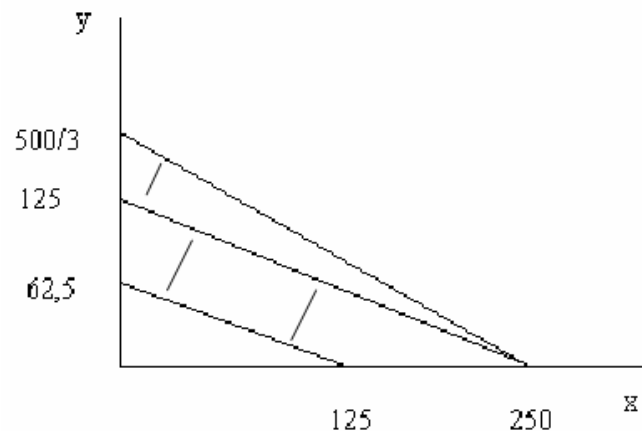
Si può quindi notare che la retta di bilancio si è spostata parallelamente rispetto alla situazione iniziale, senza che siano stati modificati i prezzi relativi, in quanto entrambi i prezzi sono aumentati nella stessa misura. La proporzione in cui ora i due beni possono essere sostituiti è la stessa; in questa nuova situazione, di fatto, si è modificato il potere di acquisto del consumatore.

Nel caso in cui il reddito si dimezzi avremo:

$$20x + 40y = 2500$$

la cui inclinazione è sempre $-\frac{1}{2}$ e le cui intercette sono $(0;62,5)$ e $(125;0)$.

E' interessante notare che si ottiene lo stesso risultato che nel caso precedente. Questo avviene perché un raddoppiamento dei prezzi dei beni, fermo restando il livello del reddito, provoca una diminuzione del potere d'acquisto che genera gli stessi effetti di una diminuzione del reddito disponibile, che si dimezza rispetto al precedente ammontare.



d) Per determinare la scelta ottimale dell'individuo è necessario uguagliare il Saggio Marginale di Sostituzione (SMS) al rapporto dei prezzi ed intersecare la soluzione con il vincolo di bilancio. Data una generica funzione di utilità, il saggio marginale di sostituzione tra due beni x e y rappresenta il costo opportunità del bene x in termini del bene y (costo opportunità che non è determinato dalle condizioni di mercato ma è implicito nella struttura delle preferenze del consumatore).

Analiticamente esso indica la disponibilità a sostituire fra loro i due beni ed è uguale, in valore assoluto, al rapporto fra le utilità marginali.

In questo caso il saggio marginale di sostituzione è

$$SMS_{x,y} = \frac{y}{x}$$

La pendenza del vincolo di bilancio è data dal rapporto dei prezzi di due beni, in questo caso:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{20}{40}$$

La scelta ottimale del consumatore si ha in corrispondenza del punto di tangenza fra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza più lontana dall'origine degli assi (quella corrispondente al livello di utilità più alta possibile): in tale punto la pendenza della curva di indifferenza (data dal SMS) e la pendenza del vincolo di bilancio sono uguali.

Analiticamente si richiede che:

$$SMS_{x,y} = \frac{p_x}{p_y}$$

Nel caso specifico, dunque, avremo

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{4}$$

Come si può notare, la condizione di ottimo dipende dalle preferenze dell'individuo e dai prezzi di mercato, ma non individua un paniere specifico. Perché questo avvenga, infatti, è necessario considerare il vincolo di bilancio che abbiamo precedentemente specificato.

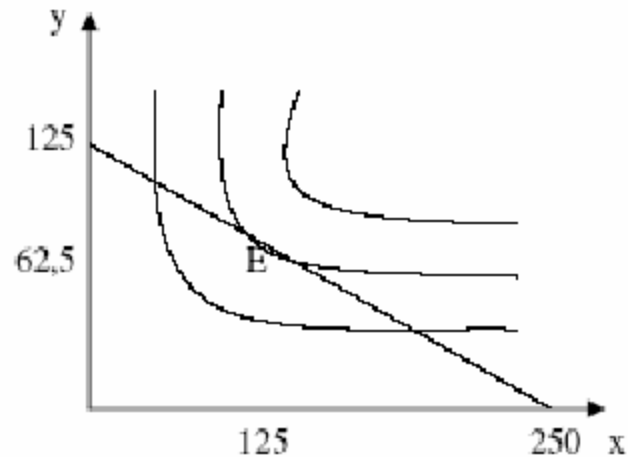
Tecnicamente, questo significa risolvere il seguente sistema (che ci permette di considerare contemporaneamente la condizione di ottimo con il vincolo di bilancio):

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ 20x + 40y = 5000 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema, per esempio, isolando y nella prima equazione, $y = \frac{1}{2}x$, e sostituendola

nella seconda. Si ottiene così $20x + 40\left(\frac{1}{2}x\right) = 5000$, da cui $x^* = 125$ e, per sostituzione, $y^* = 62,5$

La figura sottostante dà una rappresentazione grafica del problema. Si osservi che il vincolo di bilancio interseca l'asse delle y in corrispondenza del valore 125: questo è, infatti, il massimo numero di unità di bene y che il consumatore può acquistare con il proprio reddito. Analogamente, se tutto il reddito (pari a 5000) fosse impiegato per acquistare il bene x, il cui costo è pari a 20, il consumatore potrebbe consumarne fino a 250 unità



Ciascuna delle curve di indifferenza disegnate corrisponde alle combinazioni di due beni cui è associata la medesima utilità: tanto più elevata è la curva di indifferenza, tanto maggiore il livello di utilità associato.

Tra i punti appartenenti al vincolo di bilancio (e perciò accessibili al consumatore) quello di utilità più elevata corrisponde al punto in cui il vincolo di bilancio è tangente ad una delle curve di indifferenza, $U(x = 125, y = 62,5) = 7812,5$

Esercizio 2

Un consumatore ha preferenze rappresentate dalla seguente funzione di utilità: $U(x,y)=x^3y$

1. Determinare l'equilibrio se i prezzi dei beni sono $p_x = 2$, $p_y = 3$ ed il reddito monetario del consumatore, R , è 12
2. Il consumatore preferirebbe un reddito maggiorato di un terzo oppure che si dimezzasse il prezzo del bene x ?

Soluzione

1) Innanzi tutto è necessario determinare il vincolo di bilancio del consumatore, che ci indica l'insieme dei paniere accessibili all'agente.

$$R = p_x x + p_y y$$

$$12 = 2x + 3y$$

Successivamente, per determinare la scelta ottima del consumatore, è necessario uguagliare il saggio marginale di sostituzione ($SMS_{x,y} = 3 \frac{y}{x}$) ed il rapporto fra i prezzi dei beni. Avremo quindi

$$SMS_{x,y} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$3 \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

Dalla precedente equazione si ottiene $y = \frac{2}{9}x$. Tale relazione riflette l'ottimalità della scelta del consumatore - che deve rispettare simultaneamente le proprie preferenze e le regole del mercato (rappresentate dai prezzi relativi) - e deve essere inserita nel vincolo di bilancio dell'agente.

Avremo quindi

$$2x + 3 \frac{2}{9}x = 12$$

da cui si ottiene il paniere di equilibrio, E, rappresentato da

$$x^* = \frac{9}{2}$$

$$y^* = 1$$

2) Distinguiamo i due scenari e chiamiamo scenario A quello caratterizzato da reddito maggiorato di un terzo e scenario B quello caratterizzato dal prezzo dimezzato di x. Il consumatore preferirà lo scenario che gli permetterà, nel punto di ottimo, di ottenere un'utilità maggiore.

Consideriamo A e cerchiamo la scelta ottima associata al nuovo reddito

$$R' = R + \frac{1}{3}R = 16$$

Poichè nello scenario A non cambiano nè preferenze nè prezzi, possiamo rifarci al caso precedente, in cui $SMS_{x,y} = \frac{p_x}{p_y}$ era uguale a $3 \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$, ed inserire tale relazione nel nuovo vincolo di bilancio

$$16 = 2x + 3y$$

Il nuovo paniere ottimale E_A è caratterizzato da

$$x_A = 6$$

$$y_A = \frac{4}{3}$$

al quale è associata un'utilità pari a $U(x_A, y_A) = 288$

Nel caso B la scelta del consumatore dovrà aggiornarsi relativamente al nuovo prezzo di x:

$$p_x' = \frac{p_x}{2} = 1$$

Questa volta la variazione modificherà anche la condizione di ottimo (in quanto il rapporto fra i prezzi si modifica), che diventerà

$$3 \frac{y}{x} = \frac{1}{3}$$

Procedendo sempre nello stesso modo si ottiene il nuovo equilibrio E_B

$$x_B = 9$$

$$y_B = 1$$

a cui è associata un'utilità pari a $U(x_B, y_B) = 729$

Poiché il secondo paniere ottimo dà un'utilità maggiore di quello dato da A, il consumatore sceglierà la diminuzione del prezzo.

Esercizio 3

Le preferenze di un consumatore per lo zucchero di barbabietola (bene x) e lo zucchero di canna (bene y) sono rappresentate dalla seguente funzione di utilità:

$$U(x, y) = 3x + y$$

I prezzi dei beni sono $p_x = 5$ e $p_y = 10$ e il reddito a disposizione dell'individuo è pari a 20.

Determinare la scelta ottimale dell'individuo.

Soluzione

Poiché la funzione di utilità è lineare, il saggio marginale di sostituzione tra i due beni è costante e pari a:

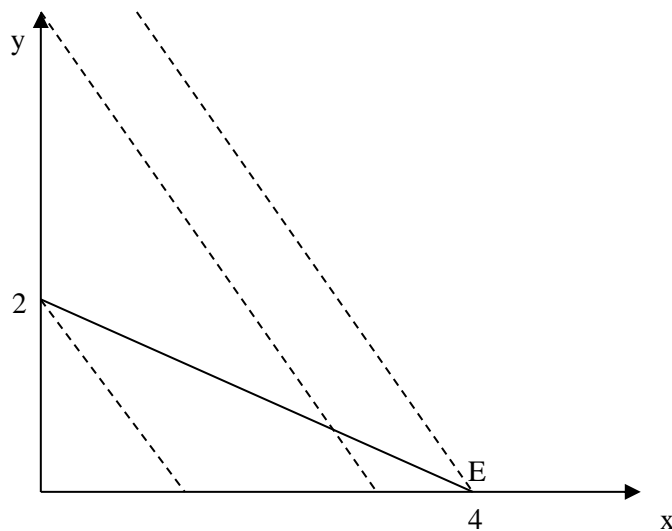
$$SMS_{x,y} = \frac{U'_x}{U'_y} = 3$$

Questo significa che le curve di indifferenza sono lineari e quindi che il punto di ottimo sarà una soluzione d'angolo, il che significa che il consumatore acquisterà solo uno dei due beni. Per sapere quale dei due e in che quantità, occorre considerare la pendenza delle curve di indifferenza (che

indica in che proporzione l'individuo è disposto a scambiare un bene con l'altro) e quella del vincolo di bilancio (che indica il rapporto in cui i due beni sono scambiati sul mercato). Un SMS pari a 3 significa che il consumatore è disposto a cedere 3 unità di y per una di x . Invece sul mercato il bene y è scambiato contro due unità di x (la pendenza del vincolo di bilancio, cioè il rapporto $\frac{p_x}{p_y}$, è pari a $\frac{1}{2}$).

Di conseguenza il consumatore preferirà spendere il suo reddito solo nell'acquisto del bene x , acquistandone una quantità pari a

$$x = \frac{R}{p_x} = 4$$



Esercizio 4

Le preferenze di un consumatore sui beni 1 e 2 sono rappresentate dalla seguente funzione di utilità:

$$U(x_1, x_2) = \text{Min}\{x_1, x_2\}$$

Il prezzo del bene 1 è $p_1 = 5$ e quello del bene 2 è $p_2 = 3$. Il reddito a disposizione del consumatore è $R = 120$.

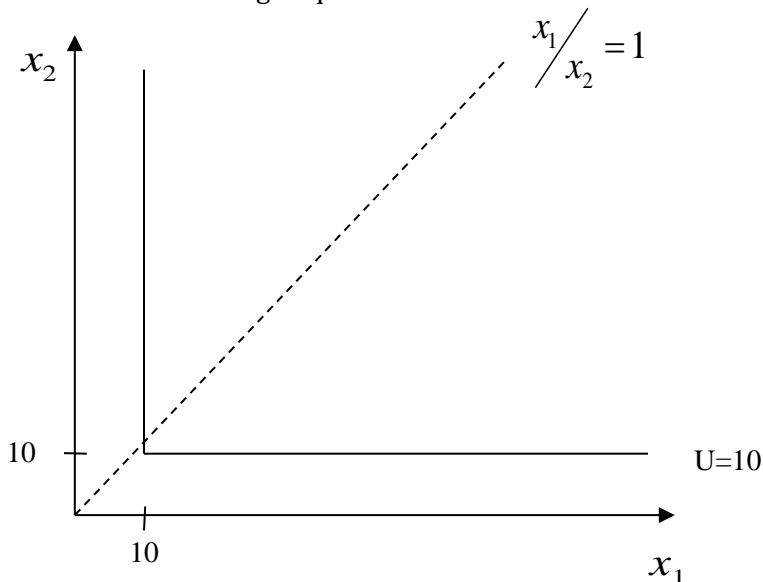
- i. Tracciare la curva di indifferenza relativa al livello di utilità pari a 10.
- ii. Queste preferenze soddisfano l'ipotesi di non sazietà?
- iii. Ricavare la combinazione di beni consumata in equilibrio.

Soluzione

i. Per questo tipo di preferenze importa solo il bene di cui si consuma la quantità minore. Difatti, l'utilità è pari al valore più piccolo fra x_1 e x_2 . Se $x_1 < x_2$ l'utilità è $U(x_1, x_2) = x_1$. Se, viceversa, $x_2 < x_1$, l'utilità è $U(x_1, x_2) = x_2$. Per trovare la curva di indifferenza cui è associato un livello di utilità pari a 10 basta eguagliare la funzione di utilità al livello desiderato. Se $x_1 < x_2$, $U(x_1, x_2) = x_1$ e $x_1 = 10$. In questo caso la curva di indifferenza è una retta parallela all'asse x_2 , con ascisse pari a $x_1 = 10$. Se $x_2 < x_1$, $U(x_1, x_2) = x_2$ e $x_2 = 10$. La curva di indifferenza è una retta parallela all'asse x_1 , con ordinata pari a $x_2 = 10$. Nel punto in cui il tratto orizzontale e quello verticale della curva di indifferenza si congiungono, ovvero dove $x_1 = x_2$ i due beni vengono consumati in quantità uguale e sempre nella stessa proporzione

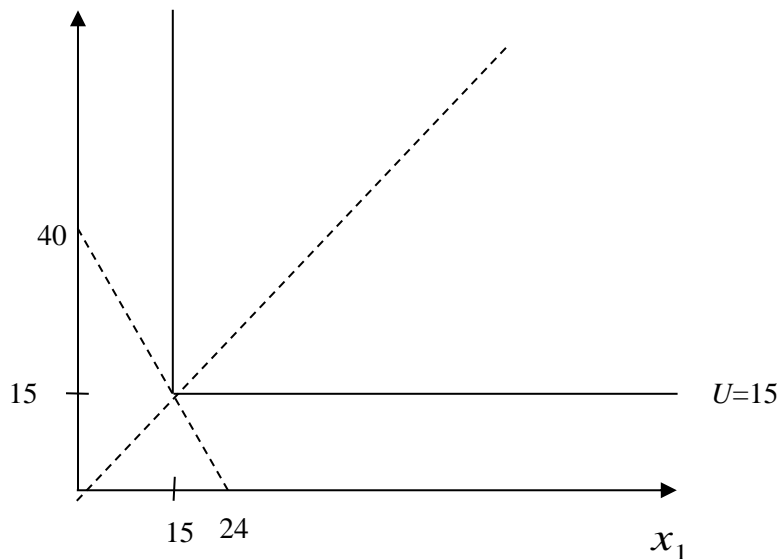
$$\frac{x_1}{x_2} = 1$$

Aumentare la quantità di uno dei due mantenendo ferma quella dell'altro non farebbe crescere l'utilità del consumatore. Per questo i due beni sono *perfetti complementi*. La curva di indifferenza relativa all'utilità 10 si disegna quindi così:



ii. Queste preferenze violano la non sazietà: infatti per esempio il paniere (2,1) non è preferito al paniere (1,1), come invece richiederebbe la non sazietà.

iii. La retta di bilancio è $5x_1 + 3x_2 = 120$. Come si può facilmente evincere dalla figura sotto rappresentata per ogni vincolo di bilancio con prezzi finiti e maggiori di zero la combinazione di beni consumata in equilibrio avrà la caratteristica di $x_1 = x_2$. Sostituendo questa espressione nella retta di bilancio abbiamo $5x_1 + 3x_1 = 120$, che ci porta a $x_1 = x_2 = 15$. Questa è la combinazione che massimizza l'utilità del consumatore data la retta di bilancio.



Esercizio 5

Data la funzione di utilità: $U(x, y) = 2xy$

- a) Determinate la scelta ottima per un consumatore con un reddito $m = 24$, nel caso in cui i prezzi dei due beni siano $p_x = 4$ e $p_y = 2$. Sapendo che le utilità marginali sono: $\frac{\partial U}{\partial x} = 2y$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x$$

- b) Il paniere (3,7) darà un'utilità maggiore, minore o uguale di quella trovata al punto (a)? Tale combinazione può rappresentare un paniere ottimale per il consumatore?

Soluzione

a) $U = 2xy$

VINCOLO DI BILANCIO: $4x + 2y = 24$

$$\text{SMS: } - \frac{y}{x}$$

RAPPORTO TRA I PREZZI:

$$-\frac{P_x}{P_y} = -2$$

$$|\text{SMS}| = \left| \frac{P_x}{P_y} \right| \Rightarrow \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = 2x$$

Sostituisco tale valore nel vincolo di bilancio ed ottengo: $4x + 2 \cdot 2x = 24$

Da cui si ricava: $x^* = \frac{24}{8} = 3$

E per sostituzione:

$$y^* = 2 \cdot 3 = 6$$

b)

$$U(3,6) = 36$$

$$U(3,7) = 42$$

L'utilità sarà maggiore ma non può rappresentare un paniere ottimale perché il consumatore non è in grado di acquistarlo dato il suo reddito.

$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 26 > 24$$

Esercizio 6

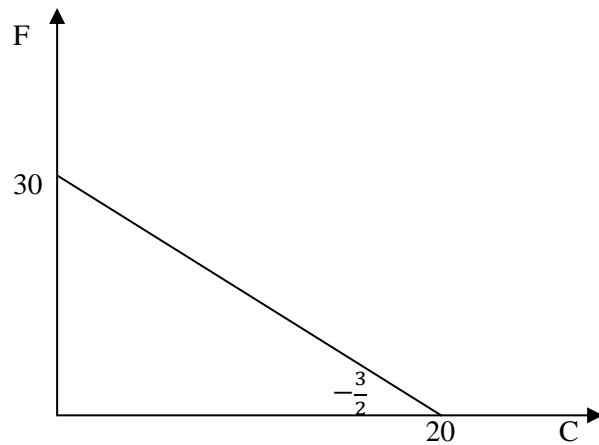
Gino ha un reddito di 300€ al mese, che spende interamente in film e concerti. Un biglietto per il concerto costa 15€ ed un biglietto per un film 10€. Le preferenze di Gino sono descritte dalla funzione di utilità $U=FC$, dove F è la quantità di film e C la quantità di concerti (frazioni sono ammissibili, per esempio acquistare $\frac{1}{2}$ concerto significa andare a un concerto ogni due mesi).

- Scrivere l'equazione del vincolo di bilancio
- Qual è il saggio marginale di sostituzione tra film e concerti per Gino?
- Qual è la quantità di film e concerti che sarà scelta?

Soluzione

- L'equazione del vincolo è: $15C + 10F = 300 \Rightarrow F = 30 - \frac{3}{2}C$

b)



c) $SMS = \frac{UM_C}{UM_F}$

$$UM_C = \frac{\partial U}{\partial C} = F; UM_F = \frac{\partial U}{\partial F} = C$$

$$SMS = \frac{F}{C}$$

d) La scelta che massimizza l'utilità dell'individuo si ottiene imponendo la condizione di ottimo:

$$SMS = \left| \frac{p_C}{p_F} \right| \Rightarrow \frac{F}{C} = \frac{15}{10} \Rightarrow F = \frac{3}{2}C \text{ e sostituiamo nel vincolo di bilancio:}$$

$$15C + 10\left(\frac{3}{2}C\right) = 300 \Rightarrow 15C + 15C = 300 \Rightarrow C^* = 10 \text{ e sostituendo:}$$

$$F^* = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$$

Esercizio 7

Un consumatore presenta la seguente funzione di utilità: $U(x,y) = x + y$,
ha un reddito di $m = 200$ e i prezzi dei due beni sono: $P_x = 2$ e $P_y = 8$. Il SMS è -1.

a) Che tipo di beni sono x ed y ?

b) Tracciate la mappa delle curve di indifferenza e il vincolo di bilancio e calcolate la scelta ottima per il consumatore

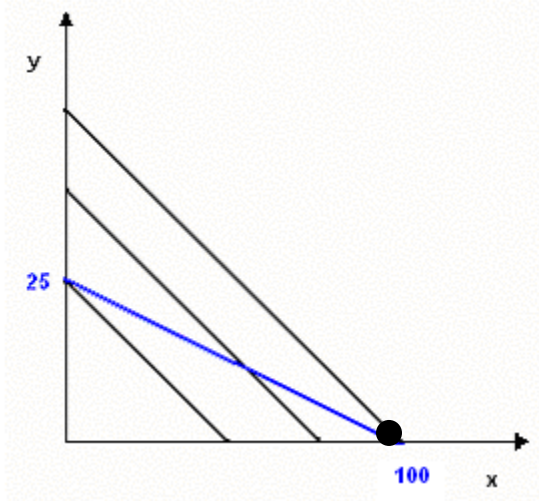
Soluzione

a) I due beni sono perfetti sostituti per cui le curve di indifferenza sono delle rette.

b) $2x + 8y = 200$ vincolo di bilancio

$$x = 100 - 4y$$

$$y = 25 - \frac{1}{4}x$$



Inclinazione vincolo di bilancio: $-\frac{P_x}{P_y} = -\frac{2}{8}$

Inclinazione curve d'indifferenza: $SMS = -1$

Abbiamo che: $\left| \frac{P_x}{P_y} \right| < |SMS|$

Il consumatore acquisterà solo il bene x e ne acquisterà un quantitativo pari a 100.

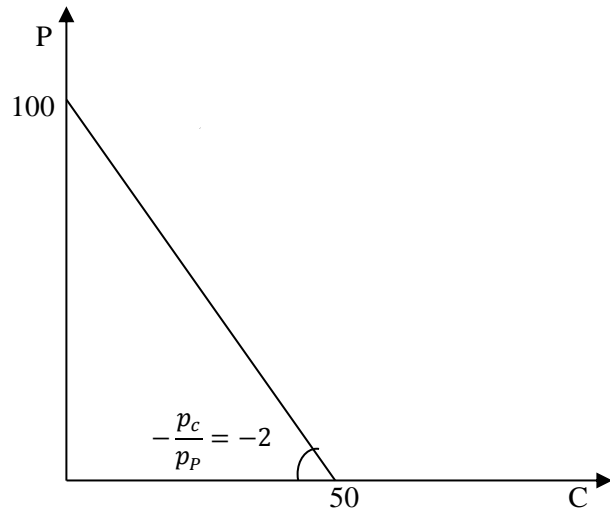
Esercizio 8

Carla dispone di un reddito mensile pari a 200 euro che ripartisce tra due beni, carne (C) e patate (P).

- Supponiamo che la carne costi 4 euro al chilo e le patate costino 2 euro al chilo. Tracciate il vincolo di bilancio di Carla.
- Supponiamo che la funzione di utilità sia data dall'equazione $U(C,P)=2C + P$. Quale combinazione di carne e patate dovrebbe acquistare Carla per massimizzare la propria utilità? La carne e le patate sono perfetti complementi?

Soluzione

a) L'equazione del vincolo di bilancio è $4C + 2P = 200$ da cui si ottiene $P = 100 - 2C$.



b) Per massimizzare l'utilità, bisogna calcolare prima il Saggio Marginale di Sostituzione:

$$SMS = \left| \frac{\Delta P}{\Delta C} \right| = \frac{UM_C}{UM_P}$$

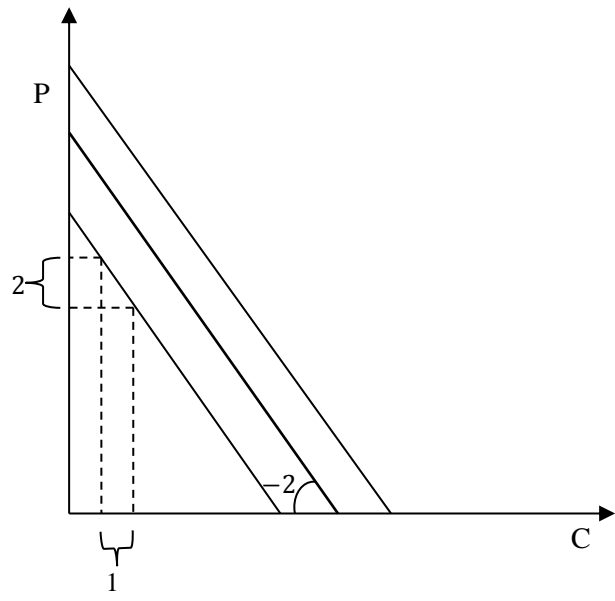
Le utilità marginali sono uguali a:

$$UM_C = \frac{\partial U}{\partial C} = 2; \quad UM_P = \frac{\partial U}{\partial P} = 1$$

poi la condizione di ottimo si ottiene quando il SMS è uguale al rapporto tra i prezzi:

$$SMS = \left| \frac{p_C}{p_P} \right| = 2$$

I due beni sono perfetti sostituti. Il motivo è che la pendenza della curva di indifferenza e del vincolo di bilancio è uguale dato che la relazione $SMS = \left| \frac{p_C}{p_P} \right| = 2$ vale sempre nello spazio cartesiano. E' utile notare che una qualsiasi combinazione dei due beni fornisce lo stesso livello di utilità. Tutte le combinazioni dei due beni appartenenti al vincolo di bilancio forniscono al consumatore la stessa soddisfazione.



Domande a risposta multipla

1. A quale delle seguenti ipotesi sulle preferenze corrisponde il concetto di saggio marginale di sostituzione decrescente?

- a. Completezza.
- b. Convessità.
- c. Transitività.
- d. Più è meglio di meno.

Soluzioni:

- a. Errato. L'ipotesi di completezza comporta che i consumatori siano in grado di classificare tutti i possibili panieri di consumo, cioè che ciascun paniere di consumo giaccia su una e una sola curva di indifferenza.
- b. Corretto. Se le curve di indifferenza sono convesse, la loro pendenza diminuisce man mano che ci si sposta da destra verso sinistra. In conseguenza, all'aumentare del consumo di un bene, il consumatore è disposto a rinunciare a quantità sempre minori dell'altro bene per ottenere un'unità aggiuntiva del primo.
- c. Errato. L'ipotesi di transitività comporta che le curve di indifferenza non si intersechino. Se C è preferito ad A e A e C giacciono sulla stessa curva di indifferenza, allora A non può giacere sulla stessa curva di indifferenza di B.
- d. Errato. L'ipotesi che il consumatore preferisca sempre una maggiore quantità di un bene a una minore comporta che le curve di indifferenza abbiano pendenza negativa. Se la quantità di uno dei due beni aumenta, perché la soddisfazione del consumatore rimanga costante è necessario che la quantità dell'altro bene diminuisca.

2. Cosa è costante lungo una curva di indifferenza?

- a. L'utilità totale che il consumatore trae dal consumo di uno dei due beni.
- b. Il saggio marginale di sostituzione tra i due beni.
- c. L'utilità totale che il consumatore trae dal consumo di entrambi i beni.
- d. Il reddito del consumatore.

Soluzioni:

- a. Errato. Le curve di indifferenza sono delle curve di livello che servono a rappresentare su un grafico bidimensionale la funzione di utilità del consumatore. La funzione di utilità misura l'utilità totale che il consumatore trae dal consumo di uno o più beni.
- b. Errato. Il saggio marginale di sostituzione è costante solo nel caso molto particolare di beni perfetti sostituti. Nel caso più generale dei beni normali, il saggio marginale di sostituzione è decrescente e le curve di indifferenza sono convesse.
- c. Corretto. Le curve di indifferenza sono delle curve di livello che servono a rappresentare su un grafico bidimensionale la funzione di utilità del consumatore. La funzione di utilità misura l'utilità totale che il consumatore trae dal consumo di uno o più beni.
- d. Errato. Le curve di indifferenza sono tracciate senza alcun esplicito riferimento al reddito del consumatore.

3. Il consumo di vodka è rappresentato sull'asse delle ascisse (in bottiglie), quello di caviale è rappresentato sull'asse delle ordinate (in ettogrammi). Se la retta di bilancio diventa più piatta e l'intercetta orizzontale rimane invariata, possiamo concludere che:

- a. Il prezzo della vodka è diminuito.
- b. Il prezzo del caviale è diminuito.
- c. Il prezzo della vodka è aumentato.
- d. Il prezzo del caviale è aumentato.

a. Errato. Se così fosse, la retta di bilancio diventerebbe più piatta, e l'intercetta verticale resterebbe invariata.

b. Errato. Se così fosse, la retta di bilancio diventerebbe più ripida, e l'intercetta orizzontale resterebbe invariata.

c. Errato. Se così fosse, la retta di bilancio diventerebbe più ripida, e l'intercetta verticale resterebbe invariata.

d. Corretto. Se il prezzo del caviale aumenta, la massima quantità di caviale che è possibile acquistare per un dato livello di reddito, cioè l'intercetta verticale della retta di bilancio, diminuisce mentre quella orizzontale rimane invariata. In conseguenza, la retta di bilancio diventa più piatta.