Costi di produzione
Viki Nellas

Esercizio 1

Considerate un'impresa che utilizzi una tecnologia descritta dalla seguente funzione $q(L, K) = 2\,K^{\frac{1}{2}}\,L^{\frac{1}{2}}$; i prezzi dei fattori lavoro e capitale sono pari rispettivamente a p_L=2 e p_K=1 ed il saggio marginale di sostituzione tecnica tra i due fattori è pari a $\frac{K}{L}$

a) Determinate le funzioni di costo totale e medio di breve periodo supponendo che nel breve periodo l'impresa sia vincolata ad utilizzare una quantità di lavoro $\bar{L} = 3$

b) Calcolate il costo totale e medio di lungo periodo.

<u>Soluzione</u>

a) Determinate le funzioni di costo totale e medio di breve periodo supponendo che nel breve periodo l'impresa sia vincolata ad utilizzare una quantità di lavoro $\bar{L} = 3$

Dato che nel breve periodo il fattore lavoro è fisso la funzione di produzione diventa:

$$q = 2\,K^{\frac{1}{2}}\,\bar{L}^{\frac{1}{2}} = 2\,K^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}\,K^{\frac{1}{2}}$$

$$q = 2\sqrt{3}\,K^{\frac{1}{2}}$$

La domanda di capitale in funzione dell'output è:

$$K^{\frac{1}{2}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

$$(K^{\frac{1}{2}})^2 = \left(\frac{q}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$K = \left(\frac{q}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$K = \frac{q^2}{4\sqrt{3^2}}$$

$$K = \frac{q^2}{12}$$

Il costo totale di breve periodo è quindi:

$$CT = w\,\bar{L} + r\,K$$

$$CT = 2 \cdot 3 + 1 \cdot \frac{q^2}{12}$$

$$CT = 6 + \frac{q^2}{12}$$

Il costo medio di breve periodo è:

$$AC = \frac{CT}{q}$$

$$AC = \frac{6 + \frac{q^2}{12}}{q}$$

$$AC = \frac{6}{q} + \frac{q}{12}$$

b) Calcolate il costo totale e medio di lungo periodo

Nel lungo periodo tutti gli input sono variabili, quindi bisogna ricavare la funzione di domanda per entrambi gli input.

Condizione di ottimo:

$$SMST = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{p_L}{p_K}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{2}{1} \Longrightarrow K = 2L$$

Sostituiamo nella funzione di produzione

$$q = 2(2L)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

$$q = 2\sqrt{2}\, L$$

da cui si ricava:

$$L = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, q \quad \text{razionalizzando} \quad L^* = \frac{\sqrt{2}}{4}\, q$$

Sostituiamo $L = \frac{\sqrt{2}}{4}$ nella condizione di ottimo $K = 2L$

$$K = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}\, q$$

$$K^* = \frac{\sqrt{2}}{2}\, q$$

Il costo totale di lungo periodo è quindi:

$$CT = w\,L + r\,K$$

$$CT = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}q + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}q$$

$$CT = \frac{\sqrt{2}}{2}\,q + \frac{\sqrt{2}}{2}q$$

$$CT = \sqrt{2}\,q$$

Il costo medio di lungo periodo è:

$$AC = \frac{CT}{q} = \frac{\sqrt{2}\,q}{q} = \sqrt{2}$$

Esercizio 2

Un'impresa è caratterizzata dalla seguente funzione di produzione:

$Q = F(K, L) = 10KL$

Se i prezzi dei fattori di produzione K e L sono rispettivamente w = 2 e r = 5 e il saggio marginale di sostituzione tecnica è $SMST = \frac{K}{L}$

a) Determinare le funzioni di costo totale, marginale e medio di breve periodo (il fattore lavoro è fisso e pari a $\bar{L} = 5$)
b) Determinare le funzioni di costo totale, marginale e medio di lungo periodo

<u>*Soluzione*</u>

a) Determinare le funzioni di costo totale, marginale e medio di breve periodo (il fattore lavoro è fisso e pari a $\bar{L} = 5$)

Nel breve periodo l'output è solo funzione del capitale K, perché L è fisso:

$$Q = F(K, \bar{L}) = 10K\bar{L} = 10\cdot 5\cdot K = 50K$$

$$K = \frac{Q}{50}$$

Il costo totale di breve periodo è:

$$CT = w\bar{L} + rK$$

$$CT = 2\cdot 5 + 5\cdot\frac{Q}{50}$$

$$CT = 10 + \frac{Q}{10}$$

Il costo marginale è:

$CM = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{1}{10}$

Il costo medio è:

$AC = \frac{CT}{Q} = \frac{10}{Q} + \frac{1}{10}$

b) Determinare le funzioni di costo totale, marginale e medio di lungo periodo

Nel lungo periodo tutti i fattori di produzione possono variare; dato che la scelta ottimale dei fattori di produzione è determinata in base alla condizione

$SMST = \frac{w}{r}$

allora

$\frac{K}{L} = \frac{2}{5} \Longrightarrow K = \frac{2}{5}L$

Sostituendo nella funzione di produzione ricaviamo le funzioni di domanda di K e di L:

$Q = 10KL$

$Q = 10L \cdot \frac{2}{5}L$

$Q = 4L^2$

$L = \frac{\sqrt{Q}}{2}$

Quindi

$K = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{Q}}{2}$

$K = \frac{\sqrt{Q}}{5}$

Il costo totale è

$CT = wL + rK$

$CT = 2 \cdot \frac{\sqrt{Q}}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{Q}}{5}$

$CT = 2\sqrt{Q}$

Il costo marginale è

$CM = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 2 \cdot \frac{1}{2} Q^{-\frac{1}{2}}$

$CM = \frac{1}{\sqrt{Q}}$

Il costo medio è

$$AC = \frac{CT}{Q} = \frac{2\sqrt{Q}}{Q} = 2Q^{-\frac{1}{2}}$$

$$AC = \frac{2}{\sqrt{Q}}$$

Esercizio 3

Un'impresa è caratterizzata da un costo fisso CF = 1000 e un costo variabile pari a $CV = 10Q - 3Q^2$. Calcolare il costo totale medio (CTMe) e il costo marginale (CM).

Soluzione

$$CT = CF + CV = 1000 + 10Q - 3Q^2$$

$$CTMe = \frac{CT}{Q} = \frac{1000 + 10Q - 3Q^2}{Q} = \frac{1000}{Q} + 10 - 3Q$$

$$CM = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 10 - 6Q$$

Esercizio 4

Un'impresa è caratterizzata da una funzione di produzione di breve periodo data da $Q = 5L^2 - 15L$. Calcolare costo marginale e costo medio variabile dell'impresa se L = 5 e w = 140.

Soluzione

Il costo variabile è dato da

$$CV = wL$$

$$CV = 140 \cdot 5 = 700$$

Costo variabile medio

$$CVMe = \frac{CV}{Q}$$

$$CVMe = \frac{700}{Q}$$

Costo marginale

$$CM = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{\partial CV}{\partial Q} = \frac{\partial wL}{\partial Q} = \frac{w\partial L}{\partial Q} = \frac{w}{P_L'}$$

Calcoliamo la produttività marginale

$$P'_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 10L - 15$$

Sostituiamo per trovare il costo marginale

$$CM = \frac{w}{P'_L} = \frac{140}{10L-15}$$

e poiché L = 5

$$CM = \frac{140}{10 \cdot 5 - 15} = \frac{140}{35} = 4$$

Esercizio 5

Un'impresa utilizza una tecnologia descritta dalla funzione di produzione

$$Q = F(L,K) = L^{1/3}K^{1/3}$$

I prezzi dei fattori lavoro e capitale sono w = 3 e r = 5.

Nel breve periodo il fattore di produzione K è fisso e pari a 27.

a) Determinare l'equazione delle curve di costo totale, medio e marginale di breve periodo dell'impresa
b) Determinare la combinazione ottimale dei fattori in corrispondenza di un output pari a 100.
c) Verificare che la stessa combinazione ottimale può essere ottenuta se l'impresa decide di spendere per l'acquisto dei fattori di produzione una somma di 7740 euro (problema duale).
d) Determinare le equazioni delle curve di costo totale, medio e marginale di lungo periodo.

<u>*Soluzione*</u>

a) *Determinare l'equazione delle curve di costo totale, medio e marginale di breve periodo dell'impresa*

Nel breve periodo l'output è funzione del solo fattore L

$$Q = F(L,\overline{K}) = L^{1/3}(27)^{1/3}$$

$$Q = 3L^{\frac{1}{3}}$$

Ricaviamo L in funzione dell'output

$$L^{1/3} = \frac{Q}{3}$$

$$L = \frac{Q^3}{27}$$

Pertanto, il costo totale è:

$$CT = wL + r\,\overline{K} = 3 \cdot \frac{Q^3}{27} + 5 \cdot 27 = \frac{Q^3}{9} + 135$$

$$CT = \frac{Q^3}{9} + 135$$

Le curve di costo medio e marginale di breve periodo sono:

(1) Costo medio

$$AC = \frac{CT}{Q}$$

$$AC = \frac{\frac{Q^3}{9} + 135}{Q}$$

$$AC = \frac{Q^2}{9} + \frac{135}{Q}$$

(2) Costo marginale

$$MC = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{1}{9} \cdot 3Q^2 = \frac{1}{3}Q^2$$

$$MC = \frac{1}{3}Q^2$$

b) *Determinare la combinazione ottimale dei fattori in corrispondenza di un output pari a 100*

La scelta ottimale dell'impresa si ottiene nel modo seguente:

(1) produttività marginali

$$P'_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{3}L^{-2/3}K^{1/3}$$

$$P'_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{3}K^{-2/3}L^{1/3}$$

(2) condizione di ottimo

$$SMST = \left|\frac{w}{r}\right| \Longrightarrow \frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = \left|\frac{w}{r}\right| \Longrightarrow \frac{\frac{1}{3}L^{-2/3}K^{1/3}}{\frac{1}{3}K^{-2/3}L^{1/3}} = \frac{3}{5} \Longrightarrow \frac{K}{L} = \frac{3}{5} \Longrightarrow K = \frac{3}{5}L$$

Sostituiamo nella funzione di produzione in corrispondenza della quantità desiderata di output Q=100

$$Q = L^{1/3}K^{1/3} \Longrightarrow 100 = L^{1/3}\left(\frac{3}{5}L\right)^{1/3} \Longrightarrow 100 = L^{2/3}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/3} \Longrightarrow L^{2/3} = 100 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1/3} \Longrightarrow$$

$$L^* = 1000 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \cong 1290;$$

quindi

$$K^* = \frac{3}{5} \cdot 1000 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} = 200 \cdot 15^{1/2} \cong 774$$

c) *Verificare che la stessa combinazione ottimale può essere ottenuta se l'impresa decide di spendere per l'acquisto dei fattori di produzione una somma di 7740 euro (problema duale)*

$$CT = wL + rK \Longrightarrow 7740 = 3L + 5K$$

Vale sempre la condizione di ottimo

$$SMST = \left|\frac{w}{r}\right| \Longrightarrow K = \frac{3}{5}L$$

sostituiamo $K = \frac{3}{5}L$ nella curva di isocosto

$$7740 = 3L + 5 \cdot \frac{3}{5}L$$

$$7740 = 6L$$

$$L^* = 1290$$

Sostituiamo il valore di L^* nella condizione di ottimo $K = \frac{3}{5}L$

$$K^* = \frac{3}{5} \cdot 1290 = 774$$

$$K^* = 774$$

d) *Determinare le equazioni delle curve di costo totale, medio e marginale di lungo periodo*

Nel lungo periodo entrambi i fattori possono variare; bisogna trovare le funzioni di domanda rispetto all'output Q.

$K = \frac{3}{5}\ L$ condizione di ottimo

Sostituiamo nella funzione di produzione

$$Q = L^{1/3} \cdot \left(\frac{3}{5}L\right)^{1/3}$$

$$Q = L^{2/3} \left(\frac{3}{5}\right)^{1/3}$$

$$L^{2/3} = Q \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1/3}$$

$L = Q^{3/2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \Longrightarrow$ funzione di domanda di L

Quindi la funzione di domanda di K è

$$K = \frac{3}{5} Q^{3/2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2}$$

$$K = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \cdot Q^{3/2}$$

Vediamo quindi le curve di costo

$$CT = wL + rK$$

$$CT = 3 \cdot Q^{3/2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} + 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \cdot Q^{3/2}$$

$$CT = Q^{3/2} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} + 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}\right]$$

$$CT = Q^{3/2} \cdot \left[3^{1/2} \cdot 5^{1/2} + 5^{1/2} \cdot 3^{1/2}\right]$$

$$CT = 2\sqrt{15} \cdot Q^{3/2}$$

Il costo medio è:

$$AC = \frac{CT}{Q} = \frac{2\sqrt{15}Q^{3/2}}{Q}$$

$$AC = 2\sqrt{15} \cdot Q^{1/2}$$

E il costo marginale è:

$$MC = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 2\sqrt{15} \cdot \frac{3}{2} Q^{1/2}$$

$$MC = 3\sqrt{15} \cdot Q^{1/2}$$

Esercizio 6:

La tecnologia di un'impresa è caratterizzata dalla seguente funzione di produzione:

$$q = 3x_1^{3/4} x_2$$

a) calcolare i rendimenti di scala;
b) dati i prezzi dei fattori $\omega_1 = 3$ e $\omega_2 = 4$, calcolare la combinazione dei fattori che consente di ottenere un livello di produzione *q=6* al minimo costo di produzione;

c) determinare come cambia la combinazione efficiente dei fattori quando il prezzo del fattore x_1 raddoppia;
d) determinare come cambia la combinazione ottimale dei fattori se l'impresa vuole raddoppiare la produzione (ai prezzi dei fattori iniziali);
e) determinare la domanda di ciascun fattore in funzione dell'output;
f) determinare la curva dei costi totali di lungo periodo;
g) determinare la curva dei costi totali di breve periodo quando la disponibilità fissa del fattore x_2 è pari a 1.

Soluzione

a) Per calcolare i rendimenti di scala, moltiplichiamo ciascun fattore produttivo per ▯ nella funzione di produzione:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 3\lambda^{3/4} x_1^{3/4} \lambda x_2 = \lambda^{7/4} q$$

Quindi questa funzione ha rendimenti di scala crescenti.

b) La combinazione ottimale dei fattori che consente di produrre una quantità di output pari a 6 è determinata nel punto di tangenza tra l'isoquanto corrispondente alla quantità di 6 e la retta di isocosto più bassa possibile (corrispondente alla spesa per i fattori più bassa possibile). Quindi occorre porre a sistema un'equazione che impone la tangenza tra isoquanto e isocosto e un'altra equazione che assicura che tale tangenza avvenga in corrispondenza dell'isoquanto $\overline{q} = 6$:

$$\begin{cases} SMST_{1,2} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \\ 6 = 3x_1^{3/4} x_2 \end{cases}$$

La prima equazione impone l'uguaglianza tra pendenza dell'isoquanto (rappresentata dal saggio marginale di sostituzione tecnica) e pendenza dell'isocosto (pari al rapporto tra i prezzi di mercato dei fattori).

Il saggio marginale di sostituzione tecnica tra i fattori è dato dal rapporto tra produttività marginale del fattore x_1 e rapporto tra produttività marginale del fattore x_2, ovvero:

$$SMST_{1,2} = \frac{P'_1}{P'_2} = \frac{3\frac{3}{4} x_1^{\frac{3}{4}-1} x_2}{3x_1^{3/4}} = \frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1}$$

Il sistema diviene quindi:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{4} \\ 6 = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 6 = 3x_1^{3/4}x_1 \end{cases}$$

Sostituendo dalla prima equazione nella seconda, si ottiene che la combinazione economicamente efficiente dei fattori è:

$$E = \begin{cases} x_1 * = 2^{4/7} \\ x_2 * = 2^{4/7} \end{cases}$$

c) Se il prezzo del fattore x_1 raddoppia, il sistema da impostare è:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1} = \frac{6}{4} \\ 6 = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

Da cui si ottiene che la nuova combinazione efficiente dei fattori è:

$$E' = \begin{cases} x_1 * = 1 \\ x_2 * = 2 \end{cases}$$

d) Per determinare la combinazione ottimale dei fattori che consente di ottenere la quantità di produzione pari a 12 ai prezzi dei fattori iniziali, occorre impostare il sistema:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{4} \\ 12 = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

che dà soluzione

$$E'' = \begin{cases} x_1 * = 2^{8/7} \\ x_2 * = 2^{8/7} \end{cases}$$

e) Per determinare la domanda dei fattori al variare della quantità di produzione che l'impresa desidera ottenere occorre impostare il sistema iniziale senza specificare un determinato livello di produzione ma indicando la quantità prodotta con un generico q, ovvero:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{4} \\ q = 3x_1^{3/4}x_2 \end{cases}$$

da cui si ottengono le domande dei fattori in funzione della quantità prodotta:

$$x_1 = x_2 = \left(\frac{q}{3}\right)^{4/7}$$

f) Per ricavare la curva dei costi totali di lungo periodo utilizziamo le funzioni di domanda degli input in funzione dell'output, e quindi la funzione di costo di lungo periodo per questa impresa è:

$$CT_L = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 =$$
$$= 3\left(\frac{q}{3}\right)^{4/7} + 4\left(\frac{q}{3}\right)^{4/7} = 7\left(\frac{q}{3}\right)^{4/7}$$

A questa funzione di costo totale corrisponde una funzione di costo medio pari a:

$$CM_L = \frac{7}{3^{4/7}} q^{\frac{4}{7}-1} =$$
$$= \frac{7}{3^{4/7}} q^{-\frac{3}{7}}$$

e una funzione di costo marginale pari a:

$$C'_L = \frac{7}{3^{4/7}}\frac{4}{7} q^{\frac{4}{7}-1} =$$
$$= \frac{4}{3^{4/7}} q^{\frac{4}{7}-1} =$$
$$= \frac{4}{3^{4/7}} q^{-\frac{3}{7}}$$

Si noti che la funzione di costo medio di lungo periodo è decrescente (infatti la derivata prima del costo medio rispetto alla quantità prodotta è $\frac{dCM_L}{dq} = \frac{7}{3^{4/7}}\left(-\frac{3}{7}\right)q^{-10/7} < 0$), infatti la funzione di produzione presenta rendimenti di scala crescenti.

g) Quando la quantità dell'input x_2 è fissa e pari a 1 (breve periodo), la funzione di produzione per l'impresa è:

$$q = 3x_1^{3/4}\overline{x_2} = 3x_1^{3/4} \cdot 1 = 3x_1^{3/4}$$

per cui la domanda per il fattore x_1 in funzione del livello di produzione è:

$$x_1 = \left(\frac{q}{3}\right)^{4/3}$$

Quindi, la funzione di costo di breve periodo per l'impresa è:

$$CT_B = 3\left(\frac{q}{3}\right)^{4/3}$$

Si noti che questa espressione rappresenta il costo economico per l'impresa, mentre in realtà l'impresa sostiene anche un costo contabile per il fattore fisso, che non rientra tuttavia nel novero dei costi economici in quanto, poiché il fattore fisso non ha un utilizzo alternativo nel breve periodo, non rappresenta un costo opportunità per l'impresa.

Esercizio 7

La funzione di produzione di un'impresa è data da $Q = 6KL$. Il costo di una unità di lavoro è pari a w = 1500 mentre una unità di capitale costa r = 3000

a) Se nel breve periodo il capitale è fisso e pari a 10, si derivino le funzioni di costo totale di breve periodo, costo fisso, costo medio totale, costo medio fisso, costo medio variabile e costo marginale dell'impresa
b) In un contesto di lungo periodo, qual è la combinazione ottimale dei fattori K e L che permette di produrre 900 unità di output al minor costo possibile? Qual è la funzione di costo totale di lungo periodo dell'impresa?

<u>*Soluzione*</u>

a) Se nel breve periodo il capitale è fisso e pari a 10, si derivino le funzioni di costo totale di breve periodo, costo fisso, costo medio totale, costo medio fisso, costo medio variabile e costo marginale dell'impresa

Nel breve periodo vale $CT = CF + CV$

I costi fissi sono:

$CF = r \cdot \bar{K} = 3000 \cdot 10 = 30000$

Per conoscere i costi variabili determiniamo la domanda di L rispetto a Q

$Q = 6KL$

$Q = 6 \cdot 10L$

$L = \frac{Q}{60}$

il costo variabile è

$$CV = w \cdot L = 1500 \cdot \frac{Q}{60}$$

Quindi

$$CT = 30000 + 1500 \cdot \frac{Q}{60} = 30000 + 25Q$$

Il costo medio totale è

$$CTMe = \frac{CT}{Q} = \frac{30000 + 25Q}{Q} = \frac{30000}{Q} + 25$$

Il costo medio fisso è

$$CFMe = \frac{CF}{Q} = \frac{30000}{Q}$$

Il costo medio variabile è

$$CVMe = \frac{CV}{Q} = \frac{1500 \cdot \frac{Q}{60}}{Q} = \frac{25Q}{Q} = 25$$

Il costo marginale è

$$CM = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 25$$

b) *In un contesto di lungo periodo, qual è la combinazione ottimale dei fattori K e L che permette di produrre 900 unità di output al minor costo possibile? Qual è la funzione di costo totale di lungo periodo dell'impresa?*

In ottimo vale $SMST = \left|\frac{w}{r}\right|$

$$SMST = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{6K}{6L} = \frac{K}{L}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{1500}{3000} = \frac{1}{2} \Longrightarrow K = \frac{1}{2}\ L$$

sostituiamo nella funzione di produzione

$$Q = 6KL$$

$$900 = 6 \cdot \frac{L}{2} \cdot L$$

$$900 = 3L^2$$

$$L^2 = 300$$

$$L^* \cong 17$$

quindi

$$K^* = \frac{17}{2} = 8{,}5$$

Per trovare la funzione di costo totale abbiamo bisogno delle funzioni di domanda di K e L rispetto a Q:

$Q = 6KL$

Dalla condizione di ottimo sappiamo che $K = \frac{1}{2} L$

$$Q = 6 \cdot \frac{L}{2} \cdot L$$

$$L = \left(\frac{Q}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$L^* = \frac{\sqrt{3}}{3} Q^{\frac{1}{2}}$

Quindi sostituiamo L^* nella condizione di ottimo $K = \frac{1}{2} L$

$$K = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} Q^{\frac{1}{2}}$$

$$K^* = \frac{\sqrt{3}}{6} Q^{\frac{1}{2}}$$

La funzione di costo totale di lungo periodo è quindi data da:

$$CT = wL + rK$$

$$CT = 1500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} Q^{\frac{1}{2}} + 3000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} Q^{\frac{1}{2}}$$

$$CT = 500 \sqrt{3}\, Q^{\frac{1}{2}} + 500 \sqrt{3} Q^{\frac{1}{2}}$$

$$CT = 1000 \sqrt{3}\, Q^{\frac{1}{2}}$$