Oligopolio

(Viki Nellas)

Esercizio 1

Si consideri un duopolio in cui le imprese sono caratterizzate dalla seguente funzione di costo totale (identica per entrambe) $CT_i = 20q_i$. Esse offrono un prodotto omogeneo su un mercato la cui funzione di domanda è $Q = 80 - p$.
Si determinino i prezzi, la quantità, i profitti di equilibrio e il benessere sociale sia nel caso in cui le imprese competano sulle quantità (Cournot), sia sui prezzi (Bertrand), sia nel caso in cui esse decidano di colludere e imporre un cartello.
Si consideri, inoltre, il caso in cui l'impresa 1 agisca da *leader* e l'impresa 2 da *follower* (competizione à la Stackelberg).
Infine, si verifichi che è possibile superare il paradosso di Bertrand nel caso in cui vi sia differenziazione del prodotto; si considerino per questo caso le funzioni di domanda $q_1 = 80 - 4p_1 + 2p_2$ e $q_2 = 80 - 4p_2 + 2p_1$.

<u>*Soluzione*</u>

<u>**Cournot**</u>
La domanda indiretta di mercato è:
$p = 80 - Q \Longrightarrow p = 80 - (q_1 + q_2)$ poiché $Q = q_1 + q_2$

Il profitto dell'impresa 1 è dato da:
$$\Pi_1 = p \cdot q_1 - CT_1 = [80 - (q_1 + q_2)] \cdot q_1 - 20q_1 = 80q_1 - q_1{}^2 - q_1q_2 - 20q_1 =$$
$$= 60q_1 - q_1{}^2 - q_1q_2$$

La condizione del primo ordine per la massimizzazione del profitto richiede che:
$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0$$
$60 - 2q_1 - q_2 = 0;$
$q_1 = 30 - \frac{1}{2}q_2 \Longrightarrow$ funzione di reazione dell'impresa 1.

Data la simmetria della struttura dei costi delle due imprese, la funzione di reazione dell'impresa 2 sarà $q_2 = 30 - \frac{1}{2}q_1$.

L'equilibrio si ricava dall'intersezione delle due funzioni di reazione

$$\begin{cases} q_1 = 30 - \dfrac{1}{2}q_2 \\ q_2 = 30 - \dfrac{1}{2}q_1 \end{cases}$$
$$q_2 = 30 - \frac{1}{2}\left(30 - \frac{1}{2}q_2\right) \Longrightarrow q_2 = 30 - 15 + \frac{1}{4}q_2 \Longrightarrow \frac{3}{4}q_2 = 15 \Longrightarrow q_2 = 15 \cdot \frac{4}{3}$$

$q_2^* = 20$ e, per simmetria, $q_1^* = 20$

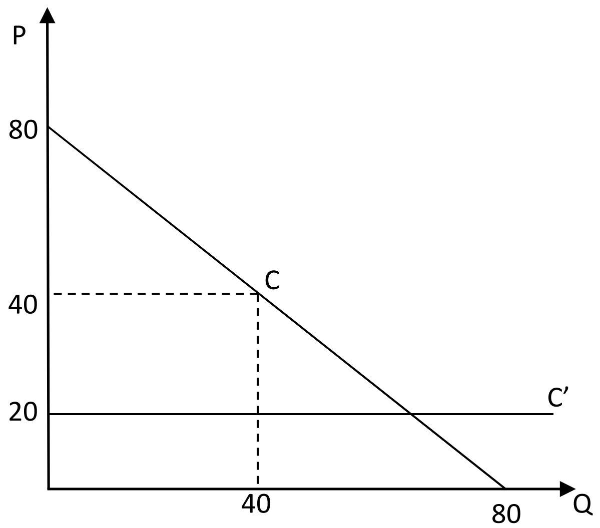
La quantità ed il prezzo di equilibrio del mercato duopolistico saranno, rispettivamente:
$Q^* = q_1^* + q_2^* = 40$
$p^* = 80 - 40 = 40$

I profitti sono dati da:
$\Pi_i = p \cdot q_i - CT_i = (40 \cdot 20) - (20 \cdot 20) = 800 - 400 = 400$ i profitti sono uguali per entrambe le imprese.

Il surplus dei produttori è la somma dei profitti delle due imprese:
$SP = 2 \cdot \Pi_i = 2 \cdot 400 = 800$

Il surplus dei consumatori è l'area compresa fra la curva di domanda e il prezzo di equilibrio:
$$SC = \frac{(80 - 40) \cdot 40}{2} = 800$$

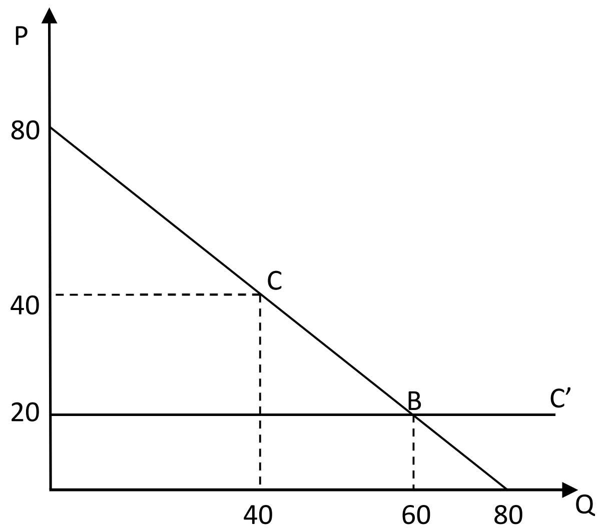
Il benessere dell'intera economia è dato la somma dei due surplus:
$B = SP + SC = 1600$



Bertrand
La competizione sui prezzi da origine alla concorrenza perfetta. Quindi deve valere:
$p^* = C' \Longrightarrow p^* = \frac{\partial CT_i}{\partial q_i} = 20$
di conseguenza
$Q^* = 80 - 20 = 60$

Rispetto a Cournot, in Bertrand osserviamo un prezzo più basso e una quantità scambiata più elevata. Poiché siamo in concorrenza perfetta, i profitti delle due imprese sono nulli, così come il surplus dei produttori. Il surplus dei consumatori è dato da:
$$SC = \frac{(80 - 20) \cdot 60}{2} = 1800$$

E coincide con il benessere dell'intera economia. Rispetto a Bertrand, in Cournot si riscontra una perdita di benessere pari a 1800-1600=200.



<u>Cartello</u>
Le imprese agiscono come fossero un monopolista.
Pertanto $q_1 = q_2 = q$.
La funzione di profitto congiunta è:

$$\Pi = [80 - (q_1 + q_2)] \cdot (q_1 + q_2) - 20(q_1 + q_2) = (80 - 2q) \cdot 2q - 20 \cdot 2q = \\ = 160q - 4q^2 - 40q = 120q - 4q^2$$

La condizione del primo ordine è:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Longrightarrow 120 - 8q = 0 \Longrightarrow q^* = 15$$

$$Q^* = 2q^* = 30$$

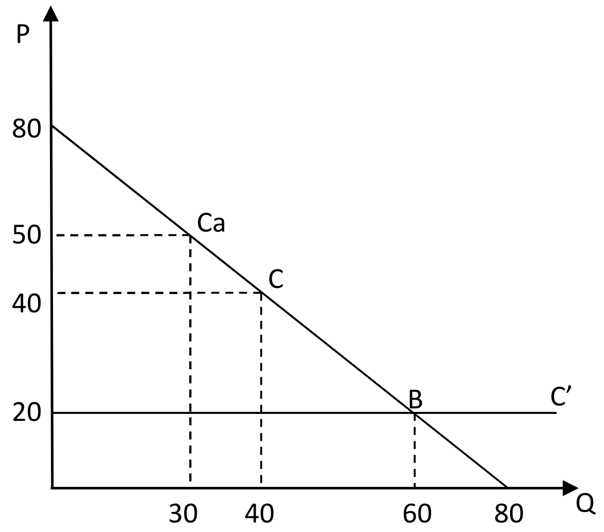
$$p^* = 80 - 30 = 50$$

$$\Pi_i = p^* \cdot q_i - CT_i = (50 \cdot 15) - (20 \cdot 15) = 750 - 300 = 450$$

Pertanto il surplus totale dei produttori è:

$$SP = 2 \cdot \Pi_i = 2 \cdot 450 = 900$$
Il surplus dei consumatori è:
$$SC = \frac{(80 - 50) \cdot 30}{2} = 450$$

Il benessere sociale è:
$$B = SP + SC = 900 + 450 = 1350$$



Stackelberg
Il leader, data la funzione di reazione del follower, massimizza il proprio profitto.
La funzione di reazione del follower è la stessa ricavata nel punto a): $q_F = 30 - \frac{1}{2} q_L$
Il problema di massimizzazione del leader diventa:

$$\max \ \Pi_L = [80 - (q_L + q_F)] \cdot q_L - 20q_L$$
$$s.v. \quad q_F = 30 - \frac{1}{2} q_L$$

Incorporiamo la funzione di reazione del follower nella funzione di profitto del leader:

$$\Pi_L = \left[80 - \left(q_L + 30 - \frac{1}{2} q_L\right)\right] \cdot q_L - 20q_L = \left[50 - \frac{1}{2} q_L\right] \cdot q_L - 20q_L =$$
$$= 50q_L - \frac{1}{2} {q_L}^2 - 20q_L = 30q_L - \frac{1}{2} {q_L}^2$$

La condizione di massimizzazione è:

$$\frac{\partial \Pi_L}{\partial q_L} = 0 \Longrightarrow 30 - q_L = 0 \Longrightarrow {q_L}^* = 30$$

Per il follower vale:
$${q_F}^* = 30 - \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$$

La quantità scambiata è:
$$Q^* = q_L^* + q_F^* = 30 + 15 = 45$$

Ed il prezzo di equilibrio sarà pari a:

$p^* = 80 - 45 = 35$

I profitti sono:

per il leader
$\Pi_L = p \cdot q_L - CT_L = (35 \cdot 30) - (20 \cdot 30) = 1050 - 600 = 450$

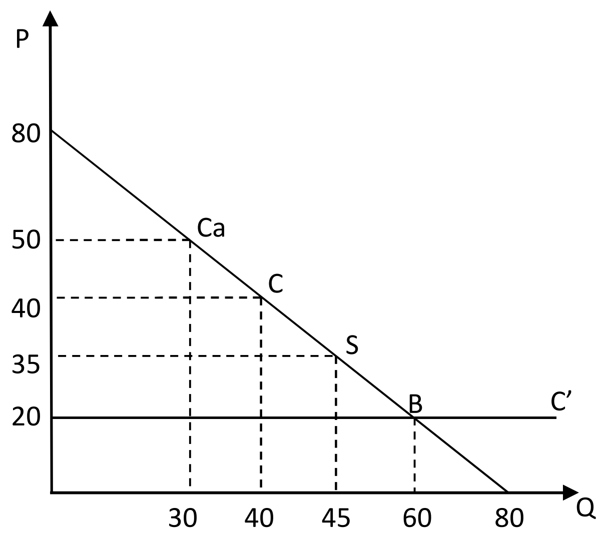
per il follower
$\Pi_F = p \cdot q_F - CT_F = (35 \cdot 15) - (20 \cdot 15) = 525 - 300 = 225$

Il surplus totale del produttore è:
$SP = 450 + 225 = 675$

Il surplus dei consumatori è:

$$SC = \frac{(80 - 35) \cdot 45}{2} = 1012{,}5$$

Il benessere totale è:
$B = 675 + 1012{,}5 = 1687{,}5$



<u>Prodotti differenziati</u>

Il profitto dell'impresa 1 è:

$$\Pi_1 = p_1(80 - 4p_1 + 2p_2) - 20(80 - 4p_1 + 2p_2) = 80p_1 - 4{p_1}^2 + 2p_1p_2 - 1600 + 80p_1 - 40p_2 =$$
$$= 160p_1 - 4{p_1}^2 + 2p_1p_2 - 1600 - 40p_2$$

La condizione del primo ordine è:

$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 0 \Rightarrow 160 - 8p_1 + 2p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = 20 + \frac{1}{4}p_2 \Rightarrow$ funzione di reazione dell'impresa 1

E per simmetria:
$p_2 = 20 + \frac{1}{4}p_1 \Longrightarrow$ funzione di reazione dell'impresa 2

Ricaviamo p_1:

$$p_1 = 20 + \frac{1}{4}\left(20 + \frac{1}{4}p_1\right) \Longrightarrow p_1 = 20 + 5 + \frac{1}{16}p_1 \Longrightarrow p_1 = 25 \cdot \frac{16}{15} = \frac{80}{3}$$
$$p_1^* = p_2^* = \frac{80}{3}$$

$$q_1^* = 80 - 4 \cdot \frac{80}{3} + 2 \cdot \frac{80}{3} = \frac{240 - 320 + 160}{3} = \frac{80}{3}$$
$$q_1^* = q_2^* = \frac{80}{3} \Longrightarrow Q^* = \frac{160}{3}$$

$$\Pi_1 = \Pi_2 = p \cdot q - CT = \frac{80}{3} \cdot \frac{80}{3} - 20 \cdot \frac{80}{3} = \frac{6400}{9} - \frac{1600}{3} = \frac{6400 - 4800}{9} = \frac{1600}{9}$$

Con prodotti differenziati il prezzo che applica il produttore è maggiore del prezzo di concorrenza perfetta; si supera il paradosso di Bertrand.

Esercizio 2
In un duopolio, due imprese producono beni differenziati e sono caratterizzate dalla funzione di costo $CT_i = 4q_i + 2$. Ciascuna impresa deve fronteggiare la seguente domanda di mercato $q_i = 10 - 2p_i + p_j$.

a) Determinare prezzi, quantità e profitti di equilibrio nel caso in cui la competizione avvenga sui prezzi.
b) Determinare la matrice dei pay-off nel caso in cui le imprese abbiano la possibilità oltre che di competere sui prezzi anche di formare un cartello. Indicare, se presente, l'eventuale equilibrio di Nash.

<u>*Soluzione*</u>
a) I profitti dell'impresa 1 sono:

$$\Pi_1 = p_1(10 - 2p_1 + p_2) - 4(10 - 2p_1 + p_2) - 2 = 10p_1 - 2{p_1}^2 + p_1p_2 - 40 + 8p_1 - 4p_2 - 2 =$$
$$= 18p_1 - 2{p_1}^2 + p_1p_2 - 42 - 4p_2$$

La condizione del primo ordine per la massimizzazione del profitto è:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 0 \Longrightarrow 18 - 4p_1 + p_2 = 0;$$
$p_1 = \frac{9}{2} + \frac{1}{4}p_2 \Longrightarrow$ funzione di reazione dell'impresa 1.

Data la simmetria nella struttura delle imprese, la funzione di reazione dell'impresa 2 è $p_2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{4}p_1$.

Quindi, sostituendo, si ricava:

$$p_1 = \frac{9}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{4}p_1\right) \Rightarrow p_1 = \frac{9}{2} + \frac{18}{16} + \frac{1}{16}p_1 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{16}\right)p_1 = \frac{90}{16}$$

$\Rightarrow p_1^* = \frac{90}{16} \cdot \frac{16}{15} = 6$ e, conseguentemente, $p_2^* = 6$.

$$q_1^* = q_2^* = 10 - 2 \cdot 6 + 6 = 4$$

I profitti sono:
$\Pi_1 = \Pi_2 = p \cdot q - CT = (6 \cdot 4) - (4 \cdot 4 + 2) = 24 - 18 = 6$

b) Nel caso in cui le imprese decidessero di formare un cartello si avrebbe:

$$\Pi = 2[\mathrm{p} \cdot \mathrm{q} - \mathrm{CT}] = 2[\mathrm{p}(10 - 2\mathrm{p} + \mathrm{p}) - 4(10 - 2\mathrm{p} + \mathrm{p}) - 2] =$$

$$= 2(10\mathrm{p} - \mathrm{p}^2 - 40 + 4\mathrm{p} - 2) = 28\mathrm{p} - 2\mathrm{p}^2 - 84$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0 \Rightarrow 28 - 4p = 0 \Rightarrow p = 7$$

$$q_1^* = q_2^* = 10 - 2 \cdot 7 + 7 = 3$$

$$\Pi_i = p \cdot q - CT_i = (7 \cdot 3) - (4 \cdot 3 + 2) = 21 - 14 = 7$$

Nel caso in cui una impresa giocasse sui prezzi e l'altra colludesse:

- per l'impresa che compete sui prezzi vale p=6, q=4 ed i profitti sono:

$$\Pi = 6 \cdot 4 - (4 \cdot 4 + 2) = 24 - 18 = 6$$

- per l'impresa che decide di colludere vale p=7, q=3 ed i profitti sono :

$$\Pi = 7 \cdot 3 - (4 \cdot 3 + 2) = 21 - 14 = 7$$

La matrice dei pay-off sarà quindi:

		2	
		BERTRAND	COLLUSIONE
1	BERTRAND	6 ; 6	6 ; 7
	COLLUSIONE	7 ; 6	7 ; 7

In questo caso l'equilibrio di Nash corrisponde alla strategia (Collusione, Collusione).

Esercizio 3
Si consideri un duopolio in cui operano due imprese caratterizzate da due funzioni di costo differenti e pari a $CT_1 = 10q_1 + 5$ e $CT_2 = 5q_2 + 20$. La funzione di domanda di mercato è $Q = 500 - 10p$. Determinare prezzi, quantità e profitti di equilibrio sia nel caso in cui la competizione avvenga sulle quantità sia nel caso in cui avvenga sui prezzi.

Soluzione
Cournot

La funzione di domanda indiretta è $p = 50 - \frac{1}{10}Q$

Per l'impresa 1 vale:

$$\Pi_1 = p \cdot q_1 - CT_1 = \left[50 - \frac{1}{10}(q_1 + q_2)\right] \cdot q_1 - (10q_1 + 5) =$$
$$= 50q_1 - \frac{1}{10}{q_1}^2 - \frac{1}{10}q_1q_2 - 10q_1 - 5 = 40q_1 - \frac{1}{10}{q_1}^2 - \frac{1}{10}q_1q_2 - 5$$

la condizione del primo ordine è:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow 40 - \frac{1}{5}q_1 - \frac{1}{10}q_2 \Rightarrow q_1 = 200 - \frac{1}{2}q_2 \Rightarrow \text{funzione di reazione impresa 1}$$

Per l'impresa 2 vale:

$$\Pi_2 = p \cdot q_2 - CT_2 = \left[50 - \frac{1}{10}(q_1 + q_2)\right] \cdot q_2 - (5q_2 + 20) =$$
$$= 50q_2 - \frac{1}{10}q_1q_2 - \frac{1}{10}{q_2}^2 - 5q_2 - 20 = 45q_2 - \frac{1}{10}q_1q_2 - \frac{1}{10}{q_2}^2 - 20$$

la condizione del primo ordine è

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow 45 - \frac{1}{5}q_2 - \frac{1}{10}q_1 = 0 \Rightarrow q_2 = 225 - \frac{1}{2}q_1 \Rightarrow \text{funzione di reazione impresa 2}$$

Sostituendo una funzione di reazione nell'altra si ottiene:

$$q_2 = 225 - \frac{1}{2}\left(200 - \frac{1}{2}q_2\right) \Rightarrow \frac{3}{4}q_2 = 125 \Rightarrow q_2^* = \frac{500}{3} \cong 167$$

Mentre per l'altra impresa vale:

$$q_1^* = 200 - \frac{1}{2} \cdot \frac{500}{3} = \frac{350}{3} \cong 117$$

$$Q^* = \frac{500}{3} + \frac{350}{3} = \frac{850}{3} \cong 283$$

$$p^* = 50 - \frac{1}{10} \cdot \frac{850}{3} = \frac{65}{3} \cong 22$$

Per quanto riguarda i profitti si ha:

$$\Pi_1 = p \cdot q_1 - CT_1 = 22 \cdot 117 - (10 \cdot 117 + 5) = 1399$$

$$\Pi_2 = p \cdot q_2 - CT_2 = 22 \cdot 167 - (5 \cdot 167 + 20) = 2819$$

Bertrand

I costi marginali sono diversi per le imprese e tali che $C'_1 = 10 > C'_2 = 5$. Se l'impresa 2, competendo con la prima sui prezzi, riesce a fare un prezzo lievemente inferiore a C'_1, l'impresa 1 esce dal mercato perché non riesce più a sostenere i propri costi, mentre l'impresa 2 diventa monopolista, perché il prezzo di mercato è invece superiore a C'_2.
Pertanto, l'impresa 2 fissa un prezzo pari a $p = 10 - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ e piccolo a piacere: in questo caso l'impresa 1 esce dal mercato, mentre per la seconda vale:

$$q_2{}^* = Q^* = 500 - 10p = 500 - 10(10 - \varepsilon) = 500 - 100 + 10\varepsilon \cong 400$$
(ε è talmente piccolo da essere trascurabile).

$$\Pi_2 = (10 - \varepsilon) \cdot 400 - (5 \cdot 400 + 20) = 4000 - 400\varepsilon - 2000 - 20 = 1980 - 400\varepsilon \cong 1980$$
(ε è talmente piccolo da essere trascurabile).

Esercizio 4

Dati i risultati dell' **Esercizio 1**, si supponga che le imprese abbiano la possibilità di raggiungere l'equilibrio *à la Cournot* oppure colludere per formare un cartello. I risultati possibili sono: entrambe le imprese competono *à la Cournot*, entrambe colludono, una compete *à la Cournot* mentre l'altra aderisce al cartello. Si scriva la matrice dei pay-off e si individui, se c'è, l'equilibrio di Nash. Cosa accade nel caso in cui il gioco si ripete all'infinito?

<u>*Soluzione*</u>

La matrice dei pay-off è:

		2	
		COURNOT	COLLUDE
1	COURNOT	400;400	500;375
	COLLUDE	375;500	450;450

I pay-off sono i profitti che ciascuna impresa otterrebbe nel caso in cui competesse alla Cournot oppure decidesse di colludere. I pay-off associati alle strategie (Cournot, Cournot) e (Collude, Collude) sono tratti direttamente dai risultati dell'esercizio precedente; i pay-off associati alle strategie incrociate si ottengono come segue:

Strategia (Cournot; Collude): in questo caso l'impresa 1 compete alla Cournot e l'impresa 2 invece aderisce al cartello. Le quantità prodotte da ciascuna impresa sono $q_1 = 20$ e $q_2 = 15$. La quantità totale è $Q = 35$ e il prezzo $p = 80 - 35 = 45$.
I profitti quindi sono:
$\Pi_1 = p \cdot q_1 - CT_1 = 45 \cdot 20 - 20 \cdot 20 = 900 - 400 = 500$
$\Pi_2 = p \cdot q_2 - CT_2 = 45 \cdot 15 - 20 \cdot 15 = 675 - 300 = 375$
La strategia opposta (Collude, Cournot), da origine a pay-off simmetrici.
Per verificare se vi siano equilibri di Nash bisogna controllare se, per ogni coppia di strategie, le imprese abbiano l'incentivo a deviare. Ciò accade per ogni strategia eccetto che per (Cournot, Cournot), che è un equilibrio di Nash. Rispetto alla strategia (Collude, Collude) è un equilibrio Pareto-inefficiente, perché i pay-off associati sono inferiori.
L'esito (Collude, Collude) potrebbe essere raggiunto nel caso in cui il gioco fosse ripetuto all'infinito. Dobbiamo verificare quali sono gli incentivi a deviare di un'impresa qualora l'altra decida di colludere al primo stadio. L'impresa che decide di deviare ottiene un profitto aggiuntivo immediato pari a $500 - 450 = 50$ (perché la strategia in questo caso sarebbe (Cournot,Collude)), ma una perdita in tutti i periodi successivi, perché l'altra impresa che era rimasta federe al cartello, vedendo la deviazione della prima, decide a sua volta di deviare. Quindi entrambe sceglieranno la strategia Cournot. L'impresa che ha deviato per prima allora ottiene un profitto aggiuntivo pari a 50 nel primo periodo, ma una perdita in tutti i periodi successivi pari a $450 - 400 = 50$ per ogni periodo. Affinché le imprese abbiano l'incentivo a restare fedeli al cartello, il valore attuale di tutte le perdite future deve essere maggiore del guadagno che si ha nel primo periodo dopo aver deviato:

$$50 < \sum_{t=1}^{\infty} 50 \left(\frac{1}{1+r}\right)^t$$

Dove alla sinistra della disequazione si ha il valore del guadagno immediato per l'impresa nel caso di deviazione, mentre a destra il valore attuale delle perdite successive causate dalla scelta della seconda impresa di deviare a sua volta. Per le proprietà delle serie vale

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t = \frac{1}{r}$$

Quindi $50 < 50 \cdot \frac{1}{r}$ e ciò è vero solo con r<1. Se il tasso di sconto è minore di uno, le imprese resteranno fedeli al cartello.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

Quando un'impresa cerca di influenzare con il proprio comportamento le azioni future di altri giocatori, si dice che tiene:
a. Un comportamento strategico.
b. Un comportamento collusivo.
c. Un comportamento non cooperativo.
d. Un comportamento lungimirante.

<u>*Soluzione*</u>:
a. Vero*. Le imprese, infatti, spesso interagiscono ripetutamente con i propri concorrenti, e possono cercare di influenzarne il comportamento futuro scegliendo strategicamente il proprio comportamento odierno.*
b. Falso. *Le imprese tengono un comportamento collusivo se si accordano, implicitamente o esplicitamente, per limitare la produzione e tenere alti i prezzi, in modo da accrescere i profitti.*
c. Falso. *Un comportamento non cooperativo può essere strategico, se l'impresa cerca di condizionare con le sue azioni il comportamento futuro degli avversari, o non strategico, se l'impresa si limita a massimizzare il suo payoff nel breve periodo.*
d. Falso*. Un'impresa che cerchi di condizionare con le sue azioni il comportamento futuro degli avversari è sicuramente lungimirante; il termine tecnico per designare questo tipo di comportamento è "comportamento strategico.*

La situazione in cui ciascuna impresa compie la migliore scelta possibile, dato il comportamento dei concorrenti, è detta:
a. Duopolio.
b. Dilemma del prigioniero.
c. Equilibrio di Nash.
d. Collusione.

<u>*Soluzione:*</u>

a. Falso. Il duopolio è una forma particolare di oligopolio in cui operano soltanto due imprese.
b. Falso. Il dilemma del prigioniero è un tipo di gioco caratterizzato da una situazione in cui ciascun giocatore compie la migliore scelta possibile, dato il comportamento dei concorrenti.
c. Vero. L'equilibrio di Nash è un concetto fondamentale della teoria dei giochi, impiegato per analizzare le interazioni strategiche tra le imprese.
d. Falso. La collusione è una situazione in cui le imprese si accordano, implicitamente o esplicitamente, per limitare la produzione e tenere alti i prezzi, in modo da accrescere i profitti.

Due oligopolisti producono un bene omogeneo, e competono fissando simultaneamente il prezzo a cui venderlo. Questo modello è detto:
a. Modello di Cournot.
b. Modello di Stackelberg.
c. Dilemma del prigioniero.
d. Modello di Bertrand.

<u>*Soluzione:*</u>

a. Falso. *Nel modello di Cournot, due o più imprese competono fissando simultaneamente la quantità da produrre.*
b. Falso*. Nel modello di Stackerlberg, una delle due imprese agisce da leader, fissando per prima la quantità da produrre e tenendo in considerazione le reazioni dell'altra impresa.*
c. Falso.*. Il dilemma del prigioniero è un gioco caratterizzato da due equilibri di Nash, in cui l'equilibrio basato sulla cooperazione è superiore all'equilibrio non cooperativo.*
d. Vero. *Se le due imprese producono un bene omogeneo, continuano a tagliare i prezzi fino al punto in cui P = C'.*