Appunti per il corso di laurea triennale SPOSI/STINT

Dispensa Matematica

Giuseppe Pignataro

14/15 Febbraio 2017

Concetto di funzione

- Dati due insiemi non vuoti A e B, si dice **funzione** di A in B una qualsiasi legge che associa ad ogni elemento x di A uno ed un solo elemento y di B.

1) $f : A \longrightarrow B$ per evidenziare la corrispondenza tra i due insiemi A e B.
2) $y = f(x)$ per indicare che l'elemento $y \in B$ risulta associato all'elemento $x \in A$ tramite la funzione f.

   - $x \in A$ è detta variabile " indipendente"
   - $y \in B$ è invece la variabile "dipendente"

Funzioni reali di variabile reale (2)

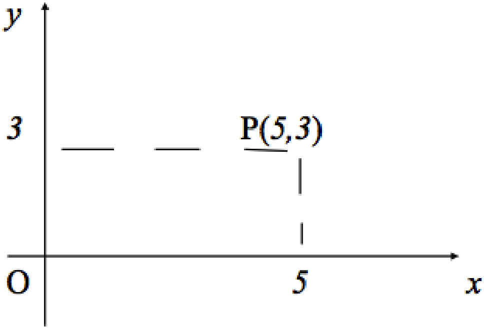
- **Esempi semplici:**

1) $y = x^2$ (funzione reale che associa ad ogni $x \in \mathbb{R}$ il suo quadrato)
2) $y = x^3$ (funzione reale che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ associa il suo cubo).
3) $y = 3x + 5$ (funzione reale che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ associa la regola 'moltiplichiamo la x per 3 e si aggiunga 5 al risultato).

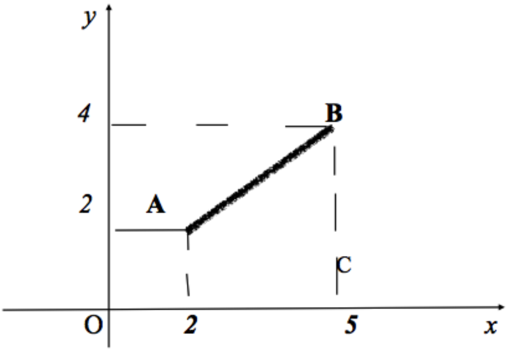
- Un ragionamento analogo si compie quando si associa una **coppia di numeri (x, y) ad una variabile z**. In questo caso scriviamo $z = f(x, y)$.
- **Esempio con due variabili:** $z = x^2 y$ (funzione reale che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ associa la regola 'eleviamo x al quadrato, moltiplichiamo il risultato per y).

Coordinate di un punto

Per assegnare le coordinate di un punto in uno spazio cartesiano è necessario disporre di due numeri reali, ad esempio $(5, 3)$.



Esempio: La congiunzione di due punti $A(2,2)$ e $B(2,4)$ nello spazio forma una retta AB.



Nota che per disegnare il grafico di una retta, servono soltanto due punti, cioè, per due punti passa una ed una sola retta.

Equazione di una retta (1)

La retta è una **funzione lineare**, cioè una funzione espressa da una equazione di 1° grado nelle variabili x e y. Si può scrivere in due forme:
$a)$ forma *implicita o normale* : $ax + by + c = 0$
$b)$ forma *esplicita* : $y = mx + q$ (che si ricava dalla forma implicita, esplicitando la variabile y, per cui $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$).

- Quindi $m = -\frac{a}{b}$ è detto coefficiente angolare della retta, mentre $q = -\frac{c}{b}$ è detto termine noto.

Equazione di una retta (2)

m rappresenta l'inclinazione della retta rispetto al semiasse positivo delle x

- se $m > 0 \longrightarrow$ la retta forma un angolo **acuto** col semiasse positivo delle x
- se $m < 0 \longrightarrow$ la retta forma un angolo **ottuso** col semiasse positivo delle x
- se $m = 0 \longrightarrow$ la retta è parallela all'asse delle x e la sua equazione esplicita diventa $y = q$

Equazioni di rette particolari:

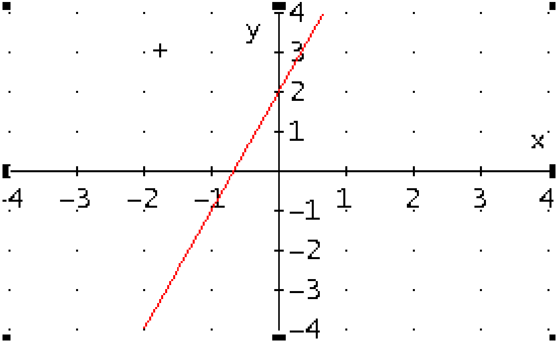
1) asse $x \longrightarrow$ la sua equazione è $y = 0$
2) asse $y \longrightarrow$ la sua equazione è $x = 0$
3) retta parallela all'asse $x \longrightarrow$ la sua equazione è $y = ...$
4) retta parallela all'asse $y \longrightarrow$ la sua equazione è $x = ...$

Grafico di una funzione

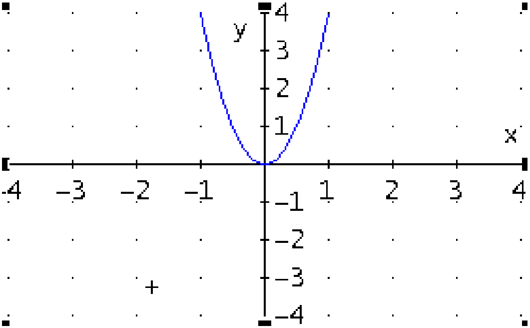
Nel piano cartesiano ortogonale ad ogni funzione $y = f(x)$ si può associare un grafico o disegno, che si ottiene unendo tutti i punti $P(x; y)$, le cui coordinate cartesiane sostituite nella funzione, la soddisfano.
Presentiamo un elenco di grafici di funzioni algebriche elementari:

- Funzione **lineare**: $y = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$
- Funzione **quadratica**: $y = ax^2 \qquad a \in \mathbb{R}$

1) Funzione lineare $y = 3x + 2$

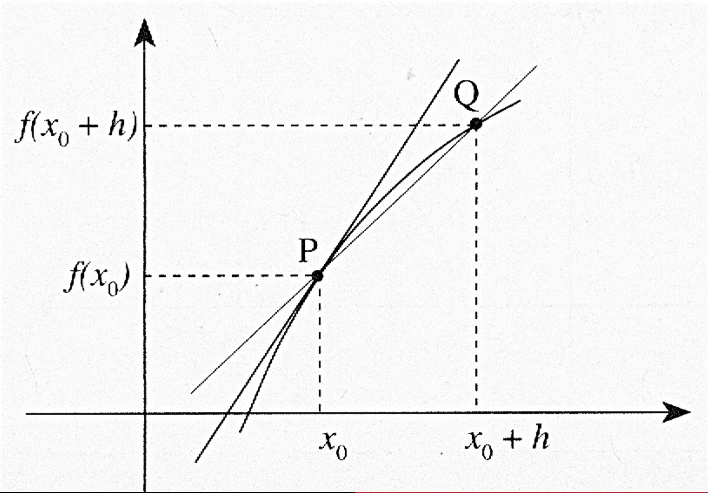


2) Funzione quadratica $y = 4x^2$



Retta tangente ad una curva

Consideriamo una curva generica $y = f(x)$. Si chiama **tangente ad una curva piana** in un suo punto P , la posizione limite (se esiste) della retta che unisce P con un altro punto Q della curva, allorchè si fa avvicinare Q indefinitivamente a P.



Definizione di rapporto incrementale

Si dice **incremento della variabile** indipendente x nel passaggio dal valore iniziale x_0 al valore $x = x_0 + h$, la differenza:

$$\Delta x = h = x - x_0$$

Si dice **incremento della funzione** $y = f(x)$ relativo al passaggio dal valore x_0 al valore $x = x_0 + h$, la differenza:

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Questo incremento può essere positivo, negativo o nullo.

Si definisce **rapporto incrementale della funzione (o saggio di variazione)** $f(x)$ relativa al punto x_0 e all'incremento h il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tra l'incremento Δy della funzione e l'incremento $\Delta x = h$ della variabile indipendente.

Definizione di derivata

Tale saggio misura quindi la variazione di y al variare di x e quindi rappresenta l'inclinazione della funzione.

Premesso questo, si definisce **derivata della funzione** $f(x)$ nel punto x_0, il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale (5) per $h \longrightarrow 0$

$$\frac{dy}{dx_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Alternativamente la derivata si indica con uno qualunque dei seguneti simboli: $f'(x_0)$ o $y'(x_0)$ o $D[f(x)]$. Il segno della derivata (come dimostrato geometricamente) fornisce l'indicazione sull'andamento della $f(x)$.

Esempio generico: Calcolare in un punto x generico la derivata della funzione $f(x) = x^2$.
Abbiamo quindi

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x = x^2 + h^2 + 2xh - x^2 = h(h+2x)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = h + 2x$$

Siccome il secondo membro di questa eguaglianza è una funzione continua della variabile h, essa ammette limite per $h \longrightarrow 0$ e questo limite vale 4.
Risulta quindi,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$$

Derivata in un punto specifico

Esempio: Calcolare nel punto $x = 2$ la derivata della funzione $f(x) = x^2$.
Abbiamo quindi

$$f(2+h) - f(2) = (2+h)^2 - 4 = 4 + h^2 + 4h - 4 = h^2 + 4h$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 4$$

Risulta quindi,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4$$

Derivate di alcune funzioni elementari

- La derivata della funzione $y = x$, cioè: $y' = f'(x) = 1$
- La derivata della funzione $y = x^2$, cioè $y' = f'(x) = 2x$
- In generale la derivata della funzione $y = x^n$, cioè $y' = f'(x) = nx^{n-1}$ quindi ad esempio se $y = f(x) = x^4$, allora la derivata $y' = f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$.

Derivate di alcune funzioni composte

- Se $y = kf(x) = kx^n$ allora $y' = kf'(x) = k(nx^{n-1})$,
  - quindi ad esempio se $y = 5x^4$, $y' = 5(4x^{4-1}) = 20x^3$.
- Se $y = kf(x) + g(x) = kx^n + x$ allora $y' = kf'(x) + g'(x) = k(nx^{n-1}) + 1$,
  - quindi ad esempio se $y = 5x^4 + x$, $y' = 5(4x^{4-1}) + 1 = 20x^3 + 1$.
- Se $y = kf(x) - g(x) = kx^n - x$ allora $y' = kf'(x) - g'(x) = k(nx^{n-1}) - 1$,
  - quindi ad esempio se $y = 5x^4 - x$, $y' = 5(4x^{4-1}) - 1 = 20x^3 - 1$.